

ANÁLISIS DE FUNCIONES• **FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES****TEOREMA** (Criterio de la derivada primera, para funciones derivables)Sea $f: I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I de \mathfrak{R} .

- 1) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces la función es **CRECIENTE** en I .
- 2) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces la función es **DECRECIENTE** en I .

Ejemplo:

Determinar los intervalos de crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2$.Para determinar lo pedido, debemos ver para que intervalos la derivada primera es >0 ó <0 .

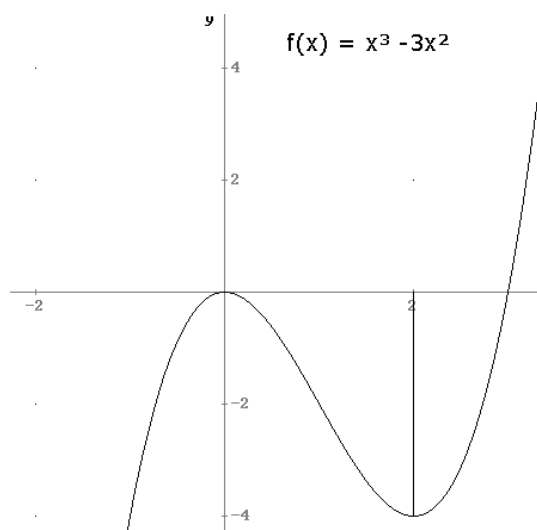
a) Derivamos : $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

- b) Hallamos los valores de
- x
- que anulan la derivada primera, es decir, aquellos valores del dominio de la función para los cuales la recta tangente a la curva tiene pendiente nula, la curva no crece ni decrece.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

- c) Dividimos el dominio de la derivada primera en subintervalos y analizamos el signo para cada subintervalo.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	>0	<0	>0
En dicho intervalo la función:	CRECE	DECRECE	CRECE



- **EXTREMOS ABSOLUTOS**

Máximo absoluto

Una función definida en un conjunto A alcanza un máximo absoluto en $x = a \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no es superado por ningún otro valor que toma la función en el conjunto A.

Mínimo absoluto

Una función definida en un conjunto A alcanza un mínimo absoluto en $x = a \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no supera a ningún otro valor que toma la función en el conjunto A.

- **EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES**

Máximo relativo.

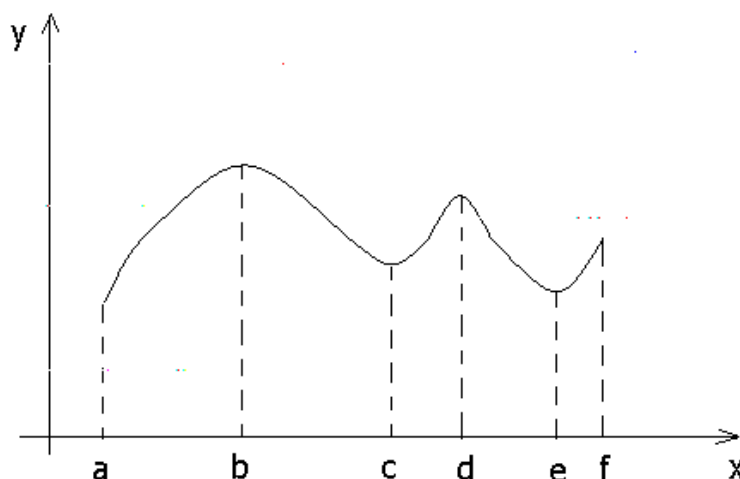
Una función definida en un conjunto A alcanza un máximo relativo en $x = a \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no es superado por ningún otro valor que toma la función en un entorno del punto $x = a$.

Mínimo relativo.

Una función definida en un conjunto A alcanza un mínimo relativo en $x = a \in Df$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no supera a ningún otro valor que toma la función en un entorno del punto $x = a$.

Dada la función definida en el intervalo $[a ; f]$

- En $x = a$ mínimo absoluto
- En $x = b$ máximo absoluto y relativo.
- En $x = c$ mínimo relativo.
- En $x = d$ máximo relativo.
- En $x = e$ mínimo relativo.



- **CRITERIOS PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS RELATIVOS**

- **CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA o CONDICIÓN NECESARIA**

Si una función alcanza un extremo relativo en $x = a$, entonces la derivada primera en ese punto es 0.

Esto se debe a que si $f'(a)$ fuese < 0 la función sería decreciente en ese punto, si

$f'(a)$ fuese >0 la función sería creciente en ese punto. Y como en los puntos en los cuales la función alcanza un extremo relativo no es creciente ni decreciente entonces su derivada primera debe ser 0.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente. Es decir, NO es válido el recíproco.

Sea x_0 un punto crítico de la función $f(x)$, punto crítico es aquel valor de x que anula la derivada primera, puede ser o no extremo relativo:

- Si la derivada primera de la función cambia de signo de + a signo - en un entorno de x_0 , entonces la función tiene un máximo relativo en x_0 .
- Si la derivada primera de la función cambia de signo de - a signo + en un entorno de x_0 , entonces la función tiene un mínimo relativo en x_0 .
- Si la derivada de la función NO cambia de signo en un entorno de x_0 , entonces la función NO tiene extremo local en el punto crítico x_0 .

o CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA o CONDICIÓN SUFICIENTE

Si f tiene derivada en $x = a$, $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces la función alcanza un máximo relativo en $x = a$.

Si f tiene derivada en $x = a$, $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces la función alcanza un mínimo relativo en $x = a$.

Si la derivada segunda también se anula en $x = a$, este criterio no sirve para determinar extremos relativos

En el ejemplo planteado, empleando el criterio de la derivada primera, observamos la tabla que muestra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	>0		<0		>0
En dicho intervalo la función:	CRECE	MÁX	DECRECE	MÍN	CRECE

En $X = 0$ la función presenta un MÁXIMO LOCAL (pasa de creciente a decreciente)

En $X = 2$ la función presenta un MÍNIMO LOCAL (pasa de decreciente a creciente)

Si empleáramos el criterio de la DERIVADA SEGUNDA resulta:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Analizamos el signo de la **derivada segunda** para $X = 0$ y para $X = 2$ (valores para los cuales se anula la derivada primera)

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{en } X=0 \text{ la función presenta un MÁXIMO}$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{en } X=2 \text{ la función presenta un MÍNIMO}$$

Otro Ejemplo:

Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x$

Derivamos: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Buscamos los puntos críticos, es decir, aquellos valores de x que anulan la derivada primera:

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 ; x = 1$$

Empleando el criterio de la derivada primera:

X	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	>0		<0		>0
La función	CRECE	MÁXIMO	DECRECE	MÍNIMO	CRECE

Este criterio permite no solo obtener los extremos relativos de la función, también los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Luego

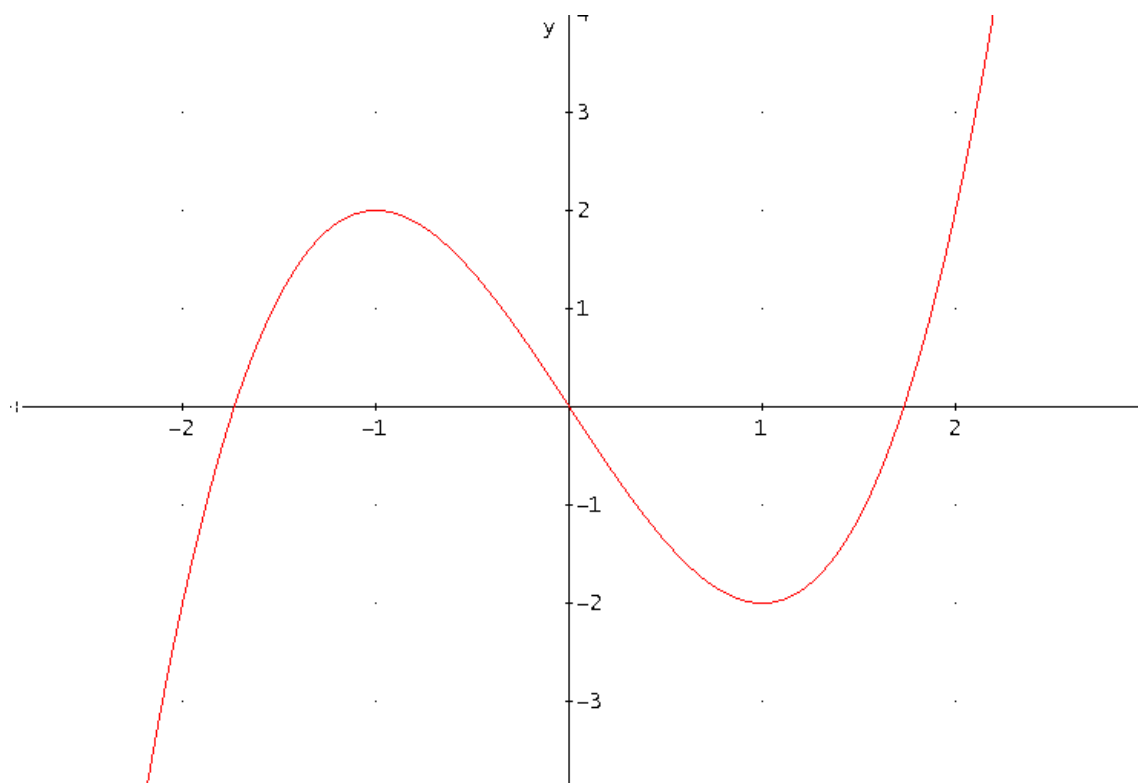
La función presenta en

$(-1; f(-1)) = (-1; 2)$ un máximo relativo

$(1; f(1)) = (1; -2)$ un mínimo relativo

Crece = $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

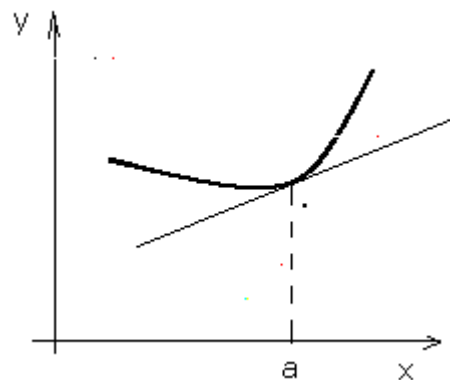
Decrece = $(-1; 1)$



• CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN

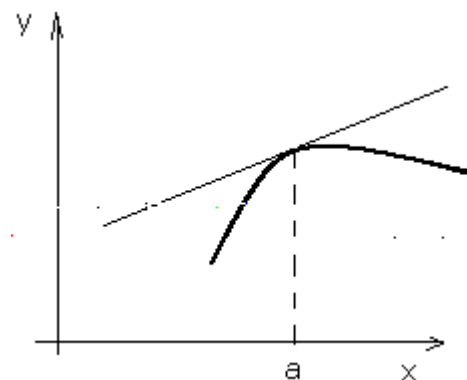
Función cóncava positiva (cóncava) en un punto.

La curva correspondiente a una función derivable es cóncava en $x = a \Leftrightarrow$ existe un entorno reducido de a donde la curva está por encima de la recta tangente a la curva en el punto.



Función cóncava negativa (convexa) en un punto.

La curva correspondiente a una función derivable es convexa en $x = a \Leftrightarrow$ existe un entorno reducido de a donde la curva está por debajo de la recta tangente a la curva en el punto.

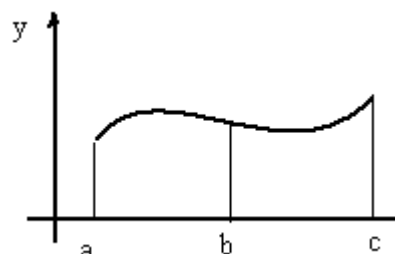


CONCAVIDAD EN UN INTERVALO

Una función es cóncava (o convexa) en un intervalo si lo es en todos los puntos interiores al mismo.

(a; b) convexa

(b; c) cóncava



• PUNTOS DE INFLEXIÓN

En $x = a$ perteneciente al dominio de la función, hay un punto de inflexión si y sólo si en el mismo la curva cambia el sentido de la concavidad.

En el gráfico anterior hay punto de inflexión en $x = b$.

CRITERIOS PARA DETERMINAR PUNTOS DE INFLEXIÓN

Así como el crecimiento de una función está vinculado con el signo de la derivada primera, la concavidad está vinculada con el signo de la derivada segunda de la función.

Los criterios para determinar los puntos de inflexión son:

Condición necesaria

Si $x = a$ es punto de inflexión entonces la derivada segunda es cero en $x = a$.

Pero cuidado, el recíproco NO es válido.

Este criterio se emplea de la siguiente manera: se hallan los valores de x que anulan la derivada segunda de la función y se estudia el signo de la misma en un entorno reducido de $x = a$, si el signo cambia de positivo a negativo, o viceversa hay punto de inflexión en $x = a$.

Condición suficiente.

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ entonces $(a; f(a))$ es un punto de inflexión.

Analizamos el ejemplo planteado inicialmente

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Hallamos los ceros de la derivada segunda, posibles puntos de inflexión:

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$X = 1$ posible punto de inflexión, para verificarlo analizamos la concavidad de la curva en un entorno de $X = 1$, (el signo de la derivada segunda)

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	< 0		> 0
En dicho intervalo la función presenta concavidad:	NEGATIVA	PUNTO DE INFLEXIÓN	POSITIVA

Como cambia de concavidad en un entorno de $X = 1$, la función presenta punto de inflexión en $(1; f(1)) = (1; -2)$

EJERCICIO

Analizar si la función cuya expresión es $f(x) = x + \frac{9}{x}$ posee máximos y/o mínimos.

En caso afirmativo hallar sus coordenadas.

Dominio de la función : $D = \mathfrak{R} - \{0\}$

Calculamos la derivada primera: $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos, posibles extremos locales

$$1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{9}{x^2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3$$

Luego $X = 3$ y $X = -3$ posibles extremos.

Determinamos los intervalos pertenecientes al DOMINIO de la derivada primera (OJO en este caso la derivada primera NO está definida para $X = 0$, este valor se excluye de los intervalos).
Resulta

X	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	>0		<0		<0		>0
La función	CRECE	MÁXIMO	DECRECE		DECRECE	MÍNIMO	CRECE

**La función presenta MÁXIMO LOCAL en (-3; -6)
Y un MÍNIMO LOCAL en (3; 6)**

