

DERIVADAS

1. Sea $f(x) = 3 - 5 \cdot e^{-(x+k)^2}$. Determinar el valor de k para que f tenga en $x = 4$ un punto crítico. Exhibir la función resultante, para el valor de k encontrado, y determinar si en $x = 4$ hay un máximo o mínimo relativo (justificando) y hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Si en $x = 4$ la función presenta un punto crítico, entonces $f'(4) = 0$.

$$f'(x) = -5 \cdot e^{-(x+k)^2} \cdot (-2) \cdot (x+k) \cdot 1$$

$$f'(x) = 10 \cdot e^{-(x+k)^2} \cdot (x+k)$$

$$f'(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(4) = 10 \cdot e^{-(4+k)^2} \cdot (4+k) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4+k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -4$$

La función resulta: $f(x) = 3 - 5 \cdot e^{-(x-4)^2}$

Para determinar si en $x = 4$ hay extremo y clasificarlo, como también para analizar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, empleamos el criterio de la derivada primera.

$$f'(x) = 10 \cdot e^{-(x-4)^2} \cdot (x-4) \quad \text{Punto crítico } x = 4. \quad \text{Dominio de } f' = \mathfrak{R}$$



Inter. Crecimiento: $(4; +\infty)$ Inter. Decrecimiento: $(-\infty; 4)$ Mínimo Local en $(4; -2)$

2. Sea $f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 16}$. Hallar dominio, ceros, asíntotas, extremos locales (indicando si son máximos o mínimos), intervalos de crecimiento y de decrecimiento, concavidad y puntos de inflexión (si existen). Graficar la función f .

$$f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 16}$$

Dominio: \mathfrak{R}

Ceros: $\{0\}$

No presenta Asíntotas Verticales.

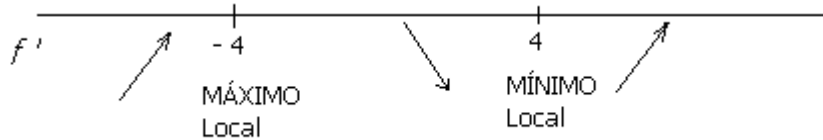
$$\text{Asíntota Horizontal} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{x^2 + 16} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4}{1 + \frac{16}{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{A.H.}$$

Crecimiento – Decrecimiento – Extremos

$$f'(x) = \frac{-4 \cdot (x^2 + 16) - (-4x)(2x)}{(x^2 + 16)^2} = \frac{4x^2 - 64}{(x^2 + 16)^2}$$

$$\frac{4x^2 - 64}{(x^2 + 16)^2} = 0 \Leftrightarrow |x| = 4$$

Dominio $f' = \mathfrak{R}$



Inter. Crecimiento: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Inter. Decrecimiento: $(-4; 4)$

Máximo Local en $\left(-4; \frac{1}{2}\right)$

Mínimo Local en $\left(4; -\frac{1}{2}\right)$

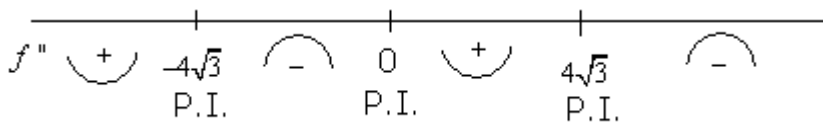
Concavidad y puntos de Inflexión.

$$f''(x) = \frac{8x \cdot (x^2 + 16)^2 - (4x^2 - 64) \cdot 2 \cdot (x^2 + 16) \cdot 2x}{(x^2 + 16)^4}$$

$$f''(x) = \frac{x \cdot (x^2 + 16) \cdot (8 \cdot (x^2 + 16) - 4 \cdot (4x^2 - 64))}{(x^2 + 16)^4}$$

$$f''(x) = \frac{x \cdot (x^2 + 16) \cdot (-8x^2 + 384)}{(x^2 + 16)^4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee |x| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

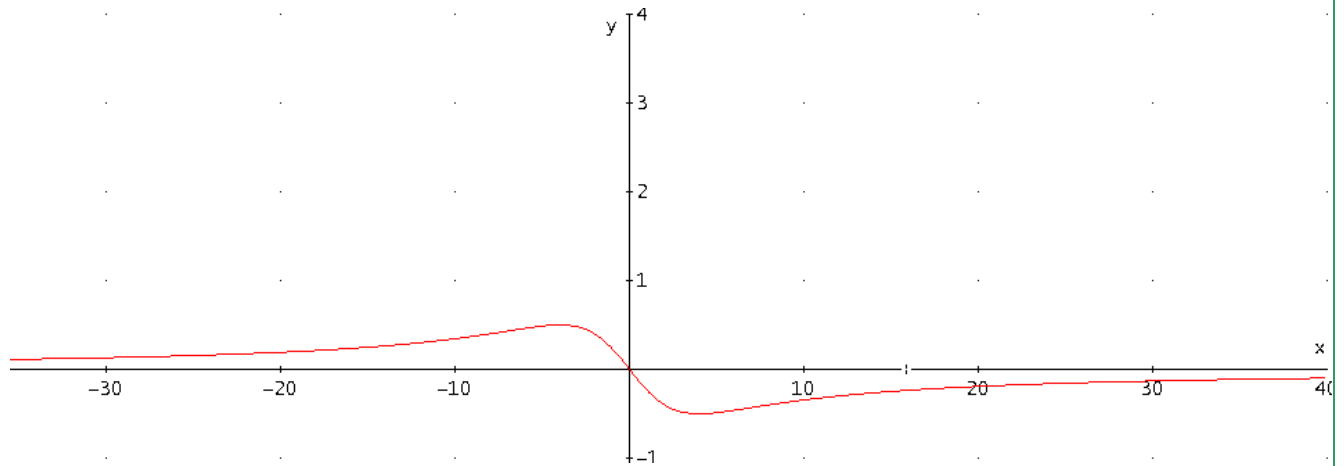
Dominio $f'' = \mathfrak{R}$



Concavidad Positiva: $(-\infty; -4\sqrt{3}) \cup (0; 4\sqrt{3})$

Concavidad Negativa: $(-4\sqrt{3}; 0) \cup (4\sqrt{3}; +\infty)$

Puntos de Inflexión $(0; 0)$, $\left(4\sqrt{3}; -\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$; $\left(-4\sqrt{3}; \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$



3. Dada $f(x) = \text{Ln}(k \cdot x^2 - 7 \cdot x) + 2$. Determinar el valor de $k \in \mathfrak{R}$ para el cual la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x=1$ tiene pendiente 9. Para el valor de k , hallar la ecuación de la recta tangente.

$$f'(x) = \frac{2kx - 7}{k \cdot x^2 - 7x}$$

$$f'(1) = 9 \Rightarrow f'(1) = \frac{2k \cdot 1 - 7}{k \cdot 1^2 - 7} = 9 \Rightarrow k = 8$$

Reemplazo el valor de k en la función, resulta: $f(x) = \text{Ln}(8 \cdot x^2 - 7 \cdot x) + 2$

Pide la recta tangente a la curva en $x = 1$ con pendiente $m = 9$

El punto de tangencia es $P = (1; f(1)) = (1; 2)$

$$2 = 1 \cdot 9 + b \Rightarrow b = -7$$

La recta tiene ecuación: $y = 9 \cdot x - 7$

4. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 3} \text{ en el punto de abscisa } x_0 = 4.$$

Siendo $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(4) = 1$.

Como:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-3) - (\sqrt{x}-1) \cdot 1}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)(4-3) - (\sqrt{4}-1) \cdot 1}{(4-3)^2} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{1^2} = -\frac{3}{4}$$

Así resultan:

$$\text{Recta tangente: } y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 4$$

$$\text{Recta normal: } y - 1 = \frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$$

5. Hallar, si existen, las coordenadas “x” e “y” de los puntos sobre la curva definida por la fórmula $f(x) = \frac{5x-1}{2-x}$ donde la recta tangente, es paralela a la recta “r” cuya ecuación es $r: 2x-2y=1$

Resolución: Como el problema nos pide que la recta tangente sea paralela a una recta dada, se debe cumplir que la función derivada se iguale a la pendiente de la misma. Siendo

$$2x-2y=1 \Rightarrow -2y=-2x+1 \Rightarrow y=x-\frac{1}{2}. \text{ Pediremos entonces como condición que: } f'_{(x)}=1.$$

$$\text{Luego: } f'(x) = \frac{5(2-x) - (5x-1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{10-5x+5x-1}{(2-x)^2} = \frac{9}{(2-x)^2}$$

Igualando a “1” tenemos que:

$$\frac{9}{(2-x)^2} = 1 \Rightarrow (2-x)^2 = 9 \Rightarrow |2-x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2-x=3 \Rightarrow x=-1 \\ 2-x=-3 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

Conocidos los valores de abscisa podemos calcular las ordenadas:

$$\text{Siendo: } x=-1 \Rightarrow y = f_{(-1)} = \frac{5(-1)-1}{2-(-1)} = -2. \text{ De donde uno de los puntos es el } P_0 = (-1; -2).$$

$$\text{En forma idéntica, siendo } x=5 \Rightarrow y = f_{(5)} = \frac{25-1}{2-5} = -8 \text{ y el otro punto es el } P_1 = (5; -8)$$

6. Hallar, si existen, dos números enteros positivos si se sabe que, cumplen la condición de sumar 20 y además el cubo de uno de ellos sumado al triple del otro resulta:
a) Máxima. b) Mínima

Resolución: Supongamos que a los números los llamamos “x” e “y”. Acorde con el enunciado debe pasar que $x+y=20$.

Lo que debemos optimizar es $f(x;y) = x^3 + 3y$. Esta expresión la podemos reducir a una única variable porque las mismas se encuentran vinculadas.

$$\text{Así resulta: } f(x) = x^3 + 3(20-x) = x^3 + 60 - 3x.$$

$$\text{Derivando tenemos: } f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Como queremos que encontrar un extremo debemos igualar esta expresión a cero. Así resulta:

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

De aquí solamente, acorde con el enunciado, la respuesta positiva o sea $x = 1$.

En este problema, dada la simpleza de las derivadas, conviene testear, si es un máximo o mínimo, con **el criterio de la segunda derivada**. Así tenemos:

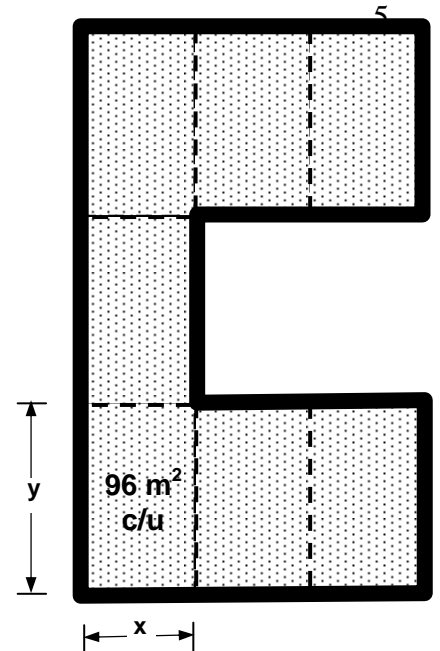
$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 > 0$$

Entonces concluimos que para $x = 1$ hay un mínimo ya que la misma resultó positiva.

$$\text{Como } x=1 \Rightarrow y=19$$

Este problema, solamente presenta un mínimo y no un máximo.

7. Un terreno está formado por 7 parcelas rectangulares de idénticas dimensiones dispuestas como se indica en la figura, donde cada parcela ocupa 96m^2 de superficie. La separación entre parcelas está dada por una alambrado que cotiza a razón de $5\$/\text{m}$ mientras que el perímetro de la zona ocupada, está dado por una pared de ladrillo que levantarla cuesta $20\$/\text{m}$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada parcela a los efectos de minimizar el costo total? Probar que efectivamente hay un costo mínimo y calcular su valor.



Resolución

Condición → cada parcela ocupa un área de 96m^2 . Como en total son 7 parcelas, planteamos la ecuación que define el área total del terreno:

$$A = 7 \cdot 96\text{m}^2 \Rightarrow 672 = 7 \cdot y \cdot x \Rightarrow \frac{96}{x} = y^{(A)}$$

Función a optimizar → en este caso se exige que el costo sea mínimo, es decir:

$$C(x; y) = (4 \cdot y) \cdot \$5 + (2 \cdot x) \cdot \$5 + (6 \cdot y) \cdot \$20 + (10 \cdot x) \cdot \$20$$

$$C(x; y) = 20y + 10x + 120y + 200x \Rightarrow C(x; y) = 140y + 210x^{(B)}$$

Si reemplazamos la expresión (A) en (B), obtenemos la función a optimizar (con la condición entre las variables incluida):

$$C(x) = 140 \cdot \frac{96}{x} + 210x \Rightarrow C(x) = \frac{13440}{x} + 210x$$

Procedemos entonces a hallar la derivada primera, los puntos críticos y mediante la derivada segunda ver si son mínimos (como pide el enunciado).

$$C'(x) = -\frac{13440}{x^2} + 210 \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{13440}{x^2} + 210 = 0 \Rightarrow 210 = \frac{13440}{x^2} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 (x > 0)$$

$$C''(x) = \frac{13440 \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \frac{26880}{x^3} \Rightarrow C''(8) = \frac{26880}{8^3} > 0$$

Para verificar se usó el criterio de la derivada segunda.

Luego en $x = 8$ la función costo $C(x)$ presenta un mínimo.

Nos resta hallar el valor de y reemplazando el valor de x obtenido en la expresión (A):

$$\frac{96}{8} = 12 = y$$

Respuesta

Las medidas del contenedor deben ser $x = 8\text{m}$ e $y = 12\text{m}$ para que se cumplan las condiciones pedidas en el enunciado del problema.

El costo mínimo es: $C(8) = \frac{13440}{8} + 210 \cdot 8 = \3360

8. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 0$ para $f(x) = 5 \cdot \ln(3x+1) - 6 \sqrt[3]{x+1}$.

La recta pasa por el punto de tangencia $P = (0; f(0)) = (0; -6)$

La recta tiene pendiente $m = f'(0)$

Derivamos la función. (Antes de derivar expresar la raíz cúbica como potencia 1/3.)

$$f'(x) = \frac{15}{3x+1} - \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$m = f'(0) \Rightarrow m = f'(0) = \frac{15}{3 \cdot 0 + 1} - \frac{2}{\sqrt[3]{(0+1)^2}} = 13 \Rightarrow m = 13$$

Luego la recta pedida es: $y = 13x - 6$

9. Sea $f(x) = (x-1)^3 \cdot (3x+17)$. Hallar dominio, máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Analizar la concavidad de la curva y los puntos de inflexión. Con la información obtenida hacer un gráfico aproximado de f .

Por ser función polinómica su Dominio es Reales.

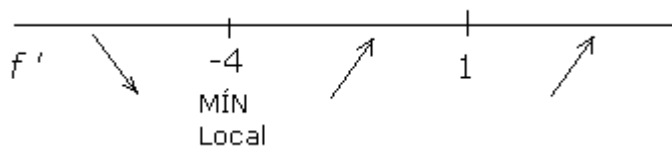
Es una función continua. No presenta asíntotas. Ceros $\left\{1; -\frac{17}{3}\right\}$

Analizamos los intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos extremos locales.

$$f'(x) = 3 \cdot (x-1)^2 (3x+17) + (x-1)^3 \cdot 3 \quad \text{Extraemos factor común}$$

$$f'(x) = (x-1)^2 \cdot (12x+48) \quad \text{Obtenemos los ceros de la derivada primera, puntos críticos.}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4 \quad \text{El Dominio de la derivada primera es Reales.}$$



Crece: $(-4; -1) \cup (1; +\infty)$

Decrece: $(-\infty; -4)$

Presenta un Mínimo Relativo en el punto $(-4; -625)$

Analizamos Concavidad y puntos de Inflexión.

$$\text{Obtenemos la derivada segunda: } f''(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (12x+48) + (x-1)^2 \cdot 12$$

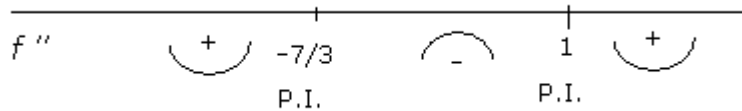
Extraemos factor común, resulta:

$$f''(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (18x+42)$$

Igualamos a cero la derivada segunda para hallar los posibles puntos de inflexión:

$$x=1 \quad \vee \quad x=-\frac{7}{3}$$

El Dominio de la derivada segunda es Reales, por ser función polinómica.



Concavidad Positiva $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

Concavidad Negativa: $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$

Puntos de Inflexión en $(1; 0)$ y $\left(-\frac{7}{3}; \frac{1000}{9}\right)$

